Caract eres automorphes d'un groupe réductif

J.-L Waldspurger

Caractères automorphes d'un groupe réductif

J.-L. Waldspurger

25 août 2016

Abstract *Let G be a reductive group defined over a number field. Denote $Z(\hat{G})$ the center of the dual group. Langlands has defined some homomorphism from some cohomology group of $Z(\hat{G})$ into the group of automorphic characters of G. We prove that it is bijective.*

Soit F un corps de caractéristique 0 qui est soit un corps local, soit un corps de nombres. On fixe une clôture algébrique $\bar{F}$ de F. On note Γ_F le groupe de Galois $Gal(\bar{F}/F)$ et W_F le groupe de Weil de F. Si F est un corps de nombres, on note $\mathbb{A}_F$ son anneau des adèles et $Val(F)$ l'ensemble de ses valuations. Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On introduit le groupe dual complexe $\hat{G}$ et son centre $Z(\hat{G})$. Ces groupes sont munis d'une action algébrique de Γ_F.

Si F est local, on définit après Langlands un homomorphisme

$$\alpha_F : H^1(W_F; Z(\hat{G})) \to Hom_{cont}(G(F), \mathbb{C}^\times),$$

l'indice "cont" indiquant qu'il s'agit d'homomorphismes continus.

Si F est un corps de nombres, on note $Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times)$ le groupe des homomorphismes continus de $G(\mathbb{A}_F)$ dans $\mathbb{C}^\times$ qui sont égaux à 1 sur $G(F)$. D'autre part, on a un homomorphisme de localisation

$$H^1(W_F; Z(\hat{G})) \to \prod_{v \in Val(F)} H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G}))$$

dont on note $ker^1(W_F; Z(\hat{G}))$ le noyau. On définit alors un homomorphisme

$$\alpha_F : H^1(W_F; Z(\hat{G}))/ker^1(W_F; Z(\hat{G})) \to Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times).$$

Si $F = \mathbb{R}$, l'homomorphisme α_F n'est en général ni surjectif, ni injectif. Si F est p-adique, α_F est toujours injectif. J'ai à plusieurs reprises commis l'erreur d'affirmer que α_F était toujours surjectif. J.-P. Labesse m'a signalé cette erreur et indiqué la référence [3] qui décrit précisément ce qu'il en est (disons toutefois que α_F est surjectif pour beaucoup de groupes usuels). Je l'en remercie vivement. Cependant, la référence [3] traite aussi le cas des corps de nombres et, dans ce cas, son résultat n'est pas optimal. En effet, on a le lemme suivant.

Lemme. *Si F est un corps de nombres, α_F est bijectif.*

Peut-être qu'une preuve de ce résultat se trouve déjà dans la littérature. Faute de l'avoir trouvée, je vais en donner une.

Remarque. Les auteurs de [3] ne supposent pas que F est de caractéristique nulle. Par prudence, je me limiterai à ce cas.

Preuve. Soient T et T' deux tores définis sur F et $f : T \to T'$ un homomorphisme défini sur F. On définit divers groupes de cohomologie associés au 2-complexe $T \xrightarrow{f} T'$. Fâcheusement, la numérotation de ces groupes diffère selon les auteurs. Nous notons $H^{i+1,i}$ le groupe dont les éléments sont des classes d'équivalence de paires de cochaînes, la première étant de degré $i+1$ et la seconde de degré i. Ainsi, on a des groupes $H^{1,0}(F; T \xrightarrow{f} T')$, $H^{1,0}(\mathbb{A}_F; T \xrightarrow{f} T')$, $H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; T \xrightarrow{f} T')$, cf. [2] 1.4 ou [1] appendice C1. Ils s'inscrivent dans une suite exacte

$$H^{1,0}(F; T \xrightarrow{f} T') \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F; T \xrightarrow{f} T') \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; T \xrightarrow{f} T').$$

Le groupe $H^{1,0}(\mathbb{A}_F; T \xrightarrow{f} T')$ est un produit restreint des groupes $H^{1,0}(F_v; T \xrightarrow{f} T')$ sur les places $v \in Val(F)$. Tous ces groupes sont munis de topologies qui en font des groupes localement compacts. Les flèches de la suite ci-dessus sont continues. Dualement, on a un complexe $\hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T}$ et on définit le groupe de cohomologie $H^{1,0}(W_F; \hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T})$ et, pour toute place $v \in Val(F)$, le groupe $H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T})$. On a un homomorphisme

$$H^{1,0}(W_F; \hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T}) \to \prod_{v \in Val(F)} H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T}).$$

On dispose d'un accouplement

$$H^{1,0}(W_F; \hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T}) \times H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; T \xrightarrow{f} T') \to \mathbb{C}^\times$$

et, pour tout $v \in Val(F)$, d'un accouplement

$$H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T}) \to H^{1,0}(F_v; T \xrightarrow{f} T').$$

Ils sont compatibles avec les homomorphismes définis ci-dessus.

Notons G_{SC} le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G et notons $\pi : G_{SC} \to G$ l'homomorphisme naturel. Choisissons un sous-tore maximal T de G défini sur F, notons T_{sc} son image réciproque par π. Labesse définit les groupes $H^0_{ab}(F; G)$, $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)$ et $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F; G)$ comme étant $H^0_{ab}(F; T_{sc} \xrightarrow{\pi} T)$, etc... Ils ne dépendent pas du choix de T car on voit que l'on peut remplacer dans leurs définitions le complexe de tores $T_{sc} \xrightarrow{\pi} T$ par le complexe de groupes diagonalisables $Z(G_{SC}) \xrightarrow{\pi} Z(G)$ (où $Z(G)$ est le centre de G et $Z(G_{SC})$ celui de G_{SC}). On dispose d'homomorphismes $ab_F : G(F) \to H^0_{ab}(F; G)$ et $ab_{F_v} : G(F_v) \to H^0(F_v; G)$ pour tout $v \in Val(F)$, ces derniers se regroupant en un homomorphisme $ab_{\mathbb{A}_F} : G(\mathbb{A}_F) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)$. Rappelons leur définition, par exemple dans le cas de ab_F. Pour $g \in G(F)$, on choisit $g_{sc} \in G_{SC}(\bar{F})$ et $z \in Z(G)(\bar{F})$ tels que $g = \pi(g_{sc})z$. On définit un cocycle $\mu : \Gamma_F \to G_{SC}$ par $\mu(\sigma) = g_{sc}\sigma(g_{sc})^{-1}$ pour $\sigma \in \Gamma_F$. On voit qu'il prend ses valeurs dans $Z(G_{SC})(\bar{F})$ et que le couple de cochaînes (μ, z) est un cocycle dont la classe dans $H^0_{ab}(F; G)$ est, par définition, $ab_F(g)$. On voit que le noyau de ab_F est égal à $\pi(G_{SC}(F))$ et que, pour toute place v, le noyau de ab_{F_v} est $\pi(G_{SC}(F_v))$. On voit aussi que l'homomorphisme $ab_{\mathbb{A}_F}$ est continu et ouvert.

Au tore T est associé un sous-tore maximal $\hat{T}$ de $\hat{G}$. Le groupe dual de G_{SC} est le groupe adjoint $\hat{G}_{AD} = \hat{G}/Z(\hat{G})$. Notons $\hat{\pi} : \hat{G} \to \hat{G}_{AD}$ l'homomorphisme naturel et $\hat{T}_{ad}$

l'image de $\hat{T}$ par π_{ad}. Le complexe dual de $T_{sc} \xrightarrow{\pi} T$ est alors $\hat{T} \xrightarrow{\hat{\pi}} \hat{T}_{ad}$. On voit que les groupes de cohomologie associés ce complexe sont égaux à ceux associés au complexe $Z(\hat{G}) \to \{1\}$, autrement dit ce sont les groupes $H^1(W_F; Z(\hat{G}))$, etc...

Nous avons ainsi introduit les objets et les homomorphismes du diagramme suivant :

$$
(1) \qquad \begin{array}{ccccc}
G_{SC}(F) & & G_{SC}(\mathbb{A}_F) & & \\
\downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \\
G(F) & \to & G(\mathbb{A}_F) & & \\
\downarrow ab_F & & \downarrow ab_{\mathbb{A}_F} & & \\
H^0_{ab}(F;G) & \xrightarrow{j} & H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G) & \xrightarrow{k} & H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;G) \\
& & & & \\
& & \prod_{v\in Val_F} H^1(W_{F_v};Z(\hat{G})) & \leftarrow & H^1(W_F;Z(\hat{G}))
\end{array}
$$

Dans notre cas, les accouplements évoqués plus haut sont des dualités parfaites ([1] lemmes A.3.B et C.2.C), c'est-à-dire qu'il s'en déduit un isomorphisme

$$\alpha'_F : H^1(W_F; Z(\hat{G})) \to Hom_{cont}(H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;G), \mathbb{C}^\times)$$

et, pour tout $v \in Val(F)$, un isomorphisme

$$\alpha'_{F_v} : H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G})) \to Hom_{cont}(H^0_{ab}(F_v;G), \mathbb{C}^\times).$$

Ces isomorphismes sont compatibles avec les homomorphismes du diagramme (1). Parce que les α'_{F_v} sont des isomorphismes, l'image par α'_F de $ker^1(W_F; Z(\hat{G}))$ est le sous-groupe des éléments de $Hom_{cont}(H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;G), \mathbb{C}^\times)$ qui sont triviaux sur l'image de l'homomorphisme k du diagramme (1). Or, d'après [1] lemme C.3.A, k se quotiente en un homéomorphisme de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)/j(H^0_{ab}(F;G))$ sur un sous-groupe ouvert de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;G)$. Donc le groupe $Hom_{cont}(H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;G), \mathbb{C}^\times)$, quotienté par le sous-groupe des éléments qui sont triviaux sur l'image de k, s'identifie à $Hom_{cont}(H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)/j(H^0_{ab}(F;G)), \mathbb{C}^\times)$. De α'_F se déduit donc un isomorphisme

$$\alpha''_F : H^1(W_F; Z(\hat{G}))/ker^1(W_F; Z(\hat{G})) \to Hom_{cont}(H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)/j(H^0_{ab}(F;G)), \mathbb{C}^\times).$$

D'autre part, de l'homomorphisme $ab_{\mathbb{A}_F}$ se déduit un homomorphisme

$$ab'_{\mathbb{A}_F} : G(\mathbb{A}_F) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)/j(H^0_{ab}(F;G)),$$

dont le noyau contient $G(F)$. On a donc dualement un homomorphisme

$$\beta : Hom_{cont}(H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)/j(H^0_{ab}(F;G)), \mathbb{C}^\times) \to Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times).$$

par définition, l'application α_F de l'énoncé est égale à $\beta \circ \alpha''_F$. Puisque α''_F est bijectif, on doit prouver que β l'est aussi.

Montrons d'abord que

(2) si G est simplement connexe, $Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times) = \{1\}$.

Notons S l'ensemble des places $v \in Val(F)$ telles que G ne soit pas quasi-déployé sur F_v. C'est un ensemble fini. D'après [3], α_{F_v} est un isomorphisme pour $v \in Val(F) - S$. Or $Z(\hat{G}) = \{1\}$ puisque $\hat{G}$ est adjoint. Donc $Hom_{cont}(G(F_v), \mathbb{C}^\times) = \{1\}$ pour $v \in Val(F) - S$. Un élément ω de $Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times)$ est donc trivial sur $G(F_v)$ pour ces places v, donc ω est trivial sur $G(F)G(\mathbb{A}^S_F)$, où $\mathbb{A}^S_F$ est le produit restreint des F_v pour $v \in Val(F) - S$. Or, parce que G est simplement connexe, cet ensemble est dense dans $G(\mathbb{A}_F)$ (théorème de Kneser-Harder, cf. [4] théorème 3.1). Donc ω est trivial, ce qui prouve (2).

Revenons à G quelconque. Soit $\omega \in Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times)$. Alors $\omega \circ \pi$ est un élément de $Hom_{cont}(G_{SC}(F)\backslash G_{SC}(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times)$, lequel est trivial d'après (2). Donc ω est trivial sur $\pi(G_{SC}(\mathbb{A}_F))$. On obtient que l'application naturelle

$$G(\mathbb{A}_F) \to G(F)\pi(G_{SC}(\mathbb{A}_F))\backslash G(\mathbb{A}_F)$$

se dualise en une bijection

$$(3) \qquad Hom_{cont}(G(F)\pi(G_{SC}(\mathbb{A}_F))\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times) \to Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times).$$

L'homomorphisme $ab'_{\mathbb{A}_F}$ introduit plus haut se quotiente en un homomorphisme

$$b : G(F)\pi(G_{SC}(\mathbb{A}_F))\backslash G(\mathbb{A}_F) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/j(H^0_{ab}(F; G))$$

et, modulo la bijection (3), β n'est autre que l'homomorphisme dual de b. D'autre part, parce que $ab_{\mathbb{A}_F}$ est continu et ouvert, b l'est aussi. Pour montrer que β est bijectif, il suffit de prouver que b l'est.

Remarquons que, puisque les suites verticales du diagramme (1) sont exactes, le groupe $G(F)\pi(G_{SC}(\mathbb{A}_F))\backslash G(\mathbb{A}_F)$ s'identifie avec $ab_{\mathbb{A}_F}(G(\mathbb{A}_F))/j \circ ab_F(G(F))$ et b devient l'application

$$b : ab_{\mathbb{A}_F}(G(\mathbb{A}_F))/j \circ ab_F(G(F)) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/j(H^0_{ab}(F; G))$$

déduite de l'injection $ab_{\mathbb{A}_F}(G(\mathbb{A}_F)) \subset H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)$.

Montrons que

(4) b est surjectif.

Notons $Val_\infty(F)$ l'ensemble des places archimédiennes de F. Pour toute place $v \in Val(F)$, l'image de ab_{F_v} est un sous-groupe ouvert d'indice fini de $H^0_{ab}(F_v; G)$. Si $v \notin Val_\infty(F)$, ab_{F_v} est surjectif, cf. [2] proposition 1.6.7. Donc l'image de b est un sous-groupe ouvert d'indice fini de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/j(H^0_{ab}(F; G))$ qui contient l'image naturelle de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F^{Val_\infty(F)}; G)$. D'après [1] lemme C.5.A, la projection de $j(H^0_{ab}(F; G))$ dans le produit $\prod_{v \in Val_\infty(F)} H^0_{ab}(F_v; G)$ est d'image dense. Il revient au même de dire que le produit de $j(H^0_{ab}(F; G))$ et de l'image naturelle de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F^{Val_\infty(F)}; G)$ dans $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)$ est dense dans ce dernier groupe, ou encore que l'image naturelle de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F^{Val_\infty(F)}; G)$ dans $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/j(H^0_{ab}(F; G))$ est dense. Ainsi, l'image de b est un sous-groupe ouvert dense, donc b est surjectif.

Montrons enfin que

(5) b est injectif.

Il revient au même de prouver l'égalité

(6) $j(H^0_{ab}(F; G)) \cap ab_{\mathbb{A}_F}(G(\mathbb{A}_F)) = j \circ ab_F(G(F))$.

L'inclusion du membre de droite dans celui de gauche est claire et est d'ailleurs utilisée dans les constructions ci-dessus. Montrons l'inclusion inverse. L'homomorphisme j s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
G_{SC}(F) & \stackrel{\pi}{\to} & G(F) & \stackrel{ab_F}{\to} & H^0_{ab}(F; G) & \to & H^1(F; G_{SC}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow h \\
G_{SC}(\mathbb{A}_F) & \stackrel{\pi}{\to} & G(\mathbb{A}_F) & \stackrel{ab_{\mathbb{A}_F}}{\to} & H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G) & \to & \prod_{v \in Val(F)} H^1(F_v; G_{SC})
\end{array}$$

Les suites horizontales sont exactes, cf. [2] page 31. Soit $x \in H^0_{ab}(F;G)$, supposons $j(x) \in ab_{\mathbb{A}_F}(G(\mathbb{A}_F))$. Alors l'image de x dans le terme sud-est du diagramme ci-dessus est triviale. L'image de x dans $H^1(F;G_{SC})$ est donc dans le noyau de h. Or ce noyau est trivial (théorème de Kneser-Harder-Chernousov, [2] théorème 1.6.9). Donc x appartient à l'image de ab_F et $j(x)$ appartient à $j \circ ab_F(G(F))$. Cela prouve (6) et achève la démonstration du lemme.

Références

[1] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[2] J.-P. Labesse : *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Astérisque 257 (1999)

[3] J.-P. Labesse, E. Lapid : *Characters of G over local and global fields*,appendice à E. Lapid, Z. Mao : *A conjecture on Whittaker-Fourier coefficients of cusp forms,* arXiv NT 13093190v2 (2013)

[4] J.-L. Sansuc : *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine u. ang. Math. 327 (1981), p.12-80

e-mail : jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr